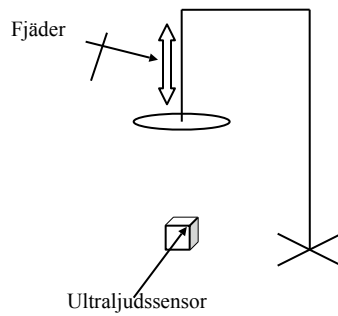
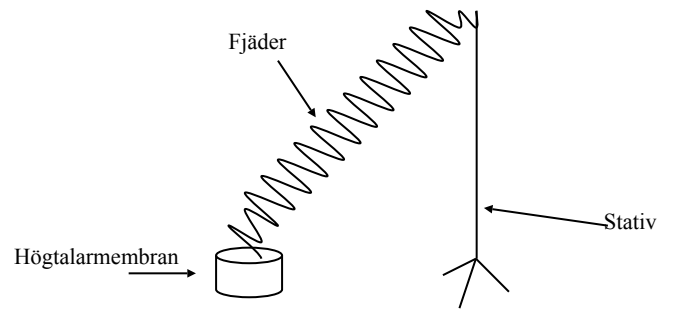
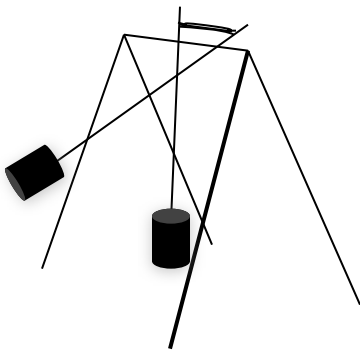
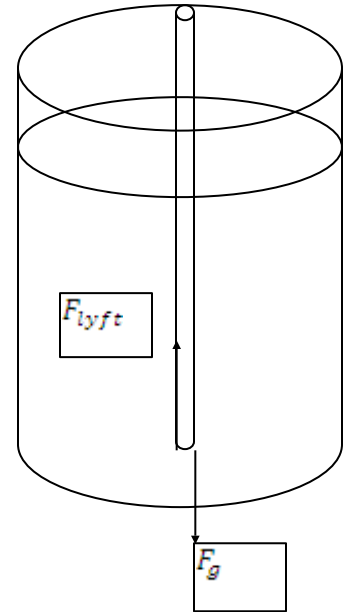


# Laboration Svängningar

Laboranter:  
Fredrik Olsen  
Roger Persson

Utförande datum:  
2007-11-22

Inlämningsdatum:  
2007-11-29



## **Försökets avsikt**

Syftet med uppgiften är att undersöka och försöka förstå vad för egenskaper olika svängande system har. Vi vill titta på vad frekvens, amplitud, dämpning och resonans är och hur det verkar på svängningar i olika system.

Ett ytterligare syfte är att ge träning i att samla in och behandla mätdata i programmet Matlab.

## **Försöksutrustning**

- En fjäderupphängd platta i ställning enligt *Figur A* under ”Utförande & Resultat”
- Ultraljudssensor för upptagning av mätvärden till Science Workshop
- Densitometer och vattenbalja
- Dubbelpendel
- Följande saker kopplade till ett svängande högtalarmembran
  - Metallblad
  - En sträng av metall
  - Metallfjäder

## **Utförande & Resultat**

I experimentet ingick huvudsakligen två uppgifter.

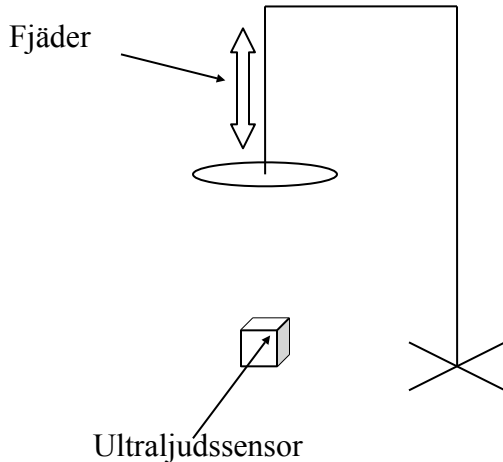
Den första var att studera ett fritt system, det vill säga en platta upphängd i en fjäder.

Målet här var att samla in mätdata för svängningen och med den datan lyckas ta reda på egenvinkelfrekvensen, rita upp ett fasdiagram och studera hur energin i svängningen såg ut.

Den andra uppgiften (uppgift 3 enl. laborationshandledning) gick ut på att studera hur frekvens, amplitud, periodtider och andra svängande egenskaper spelade roll på en rad olika system.

## Uppgift 1 – Det fria systemet

För den här uppgiften mätte vi avståndet till en platta upphängd i en fjäder från en sensor. Se figur:



*Figur A - Mätuppställning*

Utifrån våra mätvärden på det här systemet ritade vi sedan upp en kurva över svängningen i Matlab, se *Figur 1*.

**Uppgift 1 a)** var att bestämma mäta det fria systemets egenvinkelfrekvens. Det vill säga frekvensen som den själv lägger sig på utan drivning.

Med hjälp av Matlab funktionen `ginput` plockade vi ut två värden ur kurvan för läget som funktion av tiden som låg 10 våglängder isär. Vi subtraherade värdena för att få ut tiden som det tog att pendla 10 våglängder och dividerade med 10 för att få ut periodtiden.

Värdet på periodtiden bestämdes då som följande:

$$T = \frac{18,27 - 1,98}{10} = 1,629s$$

Vi har att  $f = \frac{2\pi}{T}$ , eftersom vi det är ett odrivet system blir  $f$  här vår sökta

egenfrekvens.

$$f = \frac{2\pi}{1,629} = 3,857Hz$$

Den här frekvensen fick vi som konstant för alla mätningar vi gjorde. Den här frekvensen beror alltså enbart på massan som vi har hängt i fjädern och på fjädern i sig själv. Vi skulle enkelt kunna ändra frekvensen genom att hänga på mer vikt eller byta fjäder.

**Uppgift 1 b)** gick ut på att vi skulle göra upp ett fasdiagram, alltså plotta ut hastighet som funktion av läge. Detta resulterade i *Figur 2*.

Man kan se den här figuren som en tredimensionell spiral formad som en kon med tiden på djupet. Skulle vi se det här från sidan skulle vi se en avtagande sinuskurva, det vill säga sinuskurvan för ett dämpat system.

På samma sätt i fasdiagrammet ser vi stora svängningar och hastigheter i början som avtar med djupet – tiden.

Anledningen till att det ser ut som det gör är alltså att systemet är dämpat.

Skulle vi inte ha ett dämpat system skulle sinuskurvan inte avta, vi skulle fortfarande se en spiral som fasdiagrammet, men om man ser den längs med tidsaxeln så skulle det bara bli en ellips.

Vi kan också se varför systemet roterar som det gör.

Studerar vi figuren ser vi att det roterar så att när plattan går nedåt, det vill säga vi får mindre avstånd till sensorn så räknas hastigheten som negativ när den går under jämviktsläget.

I jämviktsläget har den maximal negativ hastighet när den är i sin extrempunkt närmst sensorn och maximal positiv hastighet när den är så långt ifrån sensorn som möjligt.

Om vi antar att vi kan rotera diagrammet andra hållet kan vi se till exempel säga att vi börjar på maximalt avstånd ifrån sensorn. Vi lyfter alltså upp plattan, för att vi ska kunna rotera andra hållet än i *Figur 2* då så behöver hastigheten gå från 0m/s till 1,5m/s, när den gått förbi jämviktsläget så ska den börja minska hastigheten från 1,5m/s till 0m/s igen. När den vänt och börjar gå uppåt igen så ska den ha positiv hastighet.

Detta är detsamma som att sätta ett minustecken framför våra värden på hastigheten i Matlab. Vilket håll kurvan roterar beror alltså helt och hållet på vilken riktning vi säger att hastigheten har.

Det är mest logiskt att säga att hastigheten är negativ när den går mot sensorn och positiv när den går ifrån sensorn. Detta på grund av att vi använder sensorn som referenspunkt och säger att hastigheten är positiv när avståndet ökar och negativ när avståndet minskar. Skulle vi däremot använda en referenspunkt 1 meter ovanför jämviktsläget men fortfarande mäta 1 meter under jämviktsläget får vi negativ hastighet när plattan går ifrån sensorn och positiv hastighet när den går mot sensorn, detta skulle resultera i en kurva som roterade moturs istället för medurs.

Ett annat sätt som vi skulle kunna vända rotationshållet på kurvan är att plotta den så att vi har läget som funktion av hastighet. En kurva som roterar moturs skulle där betyda att hastigheten var negativ då plattan rörde sig mot sensorn, alltså det mest logiska alternativet.

Det skulle vara som att vi roterade hela grafen kring diagonalen genom origo.

**Uppgift 1 c)** gick ut på att vi skulle med Matlab beräkna hur energin förändrades med tiden. Detta resulterade i *Figur 3*. Vi kan tydligt se hur den potentiella och kinetiska energin är två sinuskurvor vars fasförskjutning är en halv våglängd. Vi kan även se att den totala energin i systemet är summan av den potentiella och kinetiska, samt att alla dessa tre kurvor minskar med tiden, då det är ett dämpat system.

Vi beräknade de olika energierna utifrån tidigare kunskap om energi.

Att kinetisk energi  $E_k = \frac{mv^2}{2}$ , att potentiell  $E_p = mgh$  och att total energi

$$E_{tot} = E_k + E_p.$$

Vi kunde ta reda på massan för systemet ungefär, men eftersom vi inte hade en våg till hands och det är tämligen irrelevant för uppgiften att kunna få ut värden på vad energin faktiskt var i systemet valde vi att plocka ut massorna ur ekvationen och beräkna energi per massenhet istället.

Vi gjorde detta på följande sätt för potentiell energi:

$$F = -ky$$

$$W = Fs$$

$$E_p = -\int_0^y F ds = \int_0^y (ks) ds = \left[ \frac{ks^2}{2} \right]_0^y = \frac{ky^2}{2}$$

$F$  är fjäderkraften,  $W$  är arbetet som utförs under förflyttningen  $s$ .

Vi får då att den potentiella energin är integralen av kraften som påverkar systemet och sträckan som det flyttas. Det vill säga summan av alla krafterna som verkar på systemet under en förflyttning.<sup>1</sup>

Den kinetiska energin däremot räknade vi bara rakt av med  $E_k = \frac{v^2}{2}$  där hastigheten  $v$  var våra deriverade värden på avståndet från sensorn.

Med den här datan så lyckades vi bestämma vilket värde på dämpningen  $\gamma$  som systemet hade. Med hjälp av ginput i Matlab plockade vi ut två värden ur grafen för den totala energin. Ett som var hälften så stort som det andra. Utifrån detta fick vi ut halveringstiden i systemet.

Vi bestämde halveringstiden till 3,48s.

---

<sup>1</sup> G. Jönsson & E. Nilsson, "Våglära och optik" kap 1 sid. 18

Vi har följande ekvation för energin i ett dämpat system:

$$E = E_0 e^{\frac{-\gamma t}{2}}$$

Med hjälp av detta räknade vi fram  $\gamma$  till följande:

$$\gamma = \frac{-2 \ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{t}$$

Sätter vi då  $E$  till 0,5 eftersom vi har tiden  $t$  för hur lång tid det tar att gå från 1 till 0,5 i relativ energi, dvs. halveringstiden, får vi följande värde på  $\gamma$  :

$$\gamma = \frac{-2 \ln\left(\frac{0,5}{1}\right)}{3,48} = 0,398$$

Om vi omvänt då försöker räkna ut halveringstiden med hjälp av vårt värde på  $\gamma$  får vi:

$$E = E_0 e^{\frac{-\gamma t}{2}} \Leftrightarrow t = \frac{-2 \ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{\gamma} = \frac{-2 \ln\left(\frac{0,5}{1}\right)}{0,398} = 3,4832s$$

Med hjälp av vilka två värden som helst, inte bara halveringstiden skulle vi enkelt kunna räkna ut  $\gamma$  . I det här fallet fann vi dock att det var enklast att plocka ut halveringstiden i kurvan och räkna ut  $\gamma$  ifrån detta.

## Uppgift 2 – Observation av svängande system

### Guppande densitometer

En densitometer är ett glasrör som man lägger i en vätska för att mäta vätskans densitet. Uppgiften var att härleda ett uttryck för dess periodtid när man låter den guppa upp och ner i vatten.

De krafter som verkar på densitometern när den ligger i en vätska är gravitationskraften nedåt samt lyftkraften av vattnet uppåt. Gravitationskraften ges av  $F_g = m \cdot g$ , där  $m$  är massan och  $g$  är gravitationen. Lyftkraften ges av "Archimedes princip" som säger att:

*"en i en vätska nedsänkt kropp påverkas av en lyftkraft, som är lika stor som tyngden av den undanträngda vätskemängden"*<sup>2</sup>.

Lyftkraften ges av uttrycket  $F_{lyft} = V \cdot \rho \cdot g$ , där  $V$  är volymen,  $\rho$  är densiteten av vätskan och  $g$  är gravitationen.

Eftersom densitometern guppar upp och ner hela tiden förändras volymen beroende på dess läge, vilket leder till att lyftkraften beror på densitometerens avvikelse från jämviktsläget. I jämviktsläget är lyftkraften lika stor som gravitationskraften, eftersom den ligger stilla, och när densitometern är på väg nedåt ökar volymen av den undanträngda vätskan vilket gör att lyftkraften ökar och vice versa. I ekvationen gjorde vi variabelbytet  $V = A \cdot h(y)$ , där  $A$  är tvärsnittsarean och  $h(y)$  är höjden av densitometern som funktion av läget. Vår nya ekvation blev  $F_{lyft} = A \cdot h(y) \cdot \rho \cdot g$ . I jämviktsläget ( $h(0)$ ) mätte vi höjden av densitometern som befann sig under ytan och fick det till 25.8 cm,  $h(y)$  blev då  $h(y) = (25.8 - y)$  vi förde in detta i ekvationen

$$F_{lyft} = A \cdot (25.8 - y) \cdot \rho \cdot g.$$

Den resulterande kraften på densitometern blir då  $F_{res} = -F_g + F_{lyft}$  där  $F_g$  är negativ eftersom denna kraft verkar nedåt, negativ riktning, och vice versa. Efter insättning av  $F_g$  och  $F_{lyft}$  i  $F_{res}$  får vi ekvationen  $F_{res} = -m \cdot g + A \cdot (25.8 - y) \cdot \rho \cdot g$ . Efter att multiplicerat in variablerna i parentesen får vi  $F_{res} = -m \cdot g + \underline{A \cdot \rho \cdot 25.8 \cdot g} - A \cdot \rho \cdot g \cdot y$  där vi ser att variablerna inom klammern precis är tyngden av densitometern vilket ger oss  $F_{res} = -m \cdot g + m \cdot g - A \cdot \rho \cdot g \cdot y$ . De två termerna som avser densitometerens tyngd tar således ut varandra, det återstående uttrycket blir  $F_{res} = -A \cdot \rho \cdot g \cdot y$  där vi sammanfattar konstanterna  $A \cdot \rho \cdot g$  till  $k$  som ger oss ett välbekant uttryck  $F = -k \cdot y$ . Uttrycket är precis detsamma som för kraftpåverkan av en

<sup>2</sup> [http://sv.wikipedia.org/wiki/Archimedes\\_princip](http://sv.wikipedia.org/wiki/Archimedes_princip)

elastisk pendel<sup>3</sup>. Periodtiden för svängande fjädrar ges av  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  där  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  och

eftersom  $k$  i detta sammanhang representeras av  $A \cdot \rho \cdot g$  och  $m = A \cdot \rho \cdot 25.8$  blir

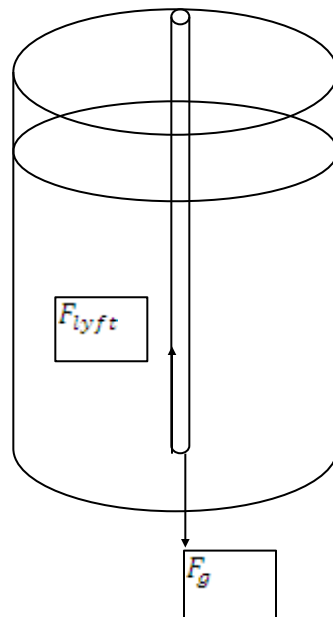
$\omega = \sqrt{\frac{A \cdot \rho \cdot g}{A \cdot \rho \cdot 25.8}}$  vilket lämnar oss med uttrycket  $\omega = \sqrt{\frac{g}{25.8}}$ . Periodtiden fås då till

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{25.8}}} = 1.018435 \text{ s.}$$

Vi mätte även upp periodtiden experimentellt och fick i följande fem mätserier periodtiden till

1	2	3	4	5
1.0 s	1.1 s	1.1 s	1.0 s	1.0 s

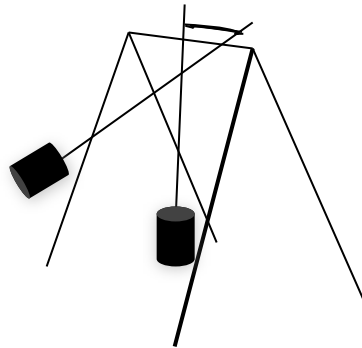
Vilket vi ansåg överensstämma väl med den teoretiskt framtagna periodtiden.



<sup>3</sup> G. Jönsson & E. Nilsson, "Våglära och optik" kap 1 sid. 14

## Dubbelpendel

Uppgiften var att studera vad som händer när man sätter en av två sammankopplade pendlar i rörelse. De två pendlarna hänger alltså i en vagga som på bilden och är hopknutna av ett gummiband längst upp. Pendlarna är lika långa och har lika stor massa längst ut.



Det vi observerade var:

När man sätter en av pendlarna i svängning ser man att den med hjälp av gummibandet hela tiden skjuter på den andra pendeln. Den gör så och fortsätter att bygga på pendel 2's amplitud tills dess egen energi har tagit slut. När energin tog slut stannade den och då började den andra pendeln istället överföra energi tillbaka. Man kunde även se att den första pendelns läge hela tiden låg före den andras till då den hade överfört all sin energi.

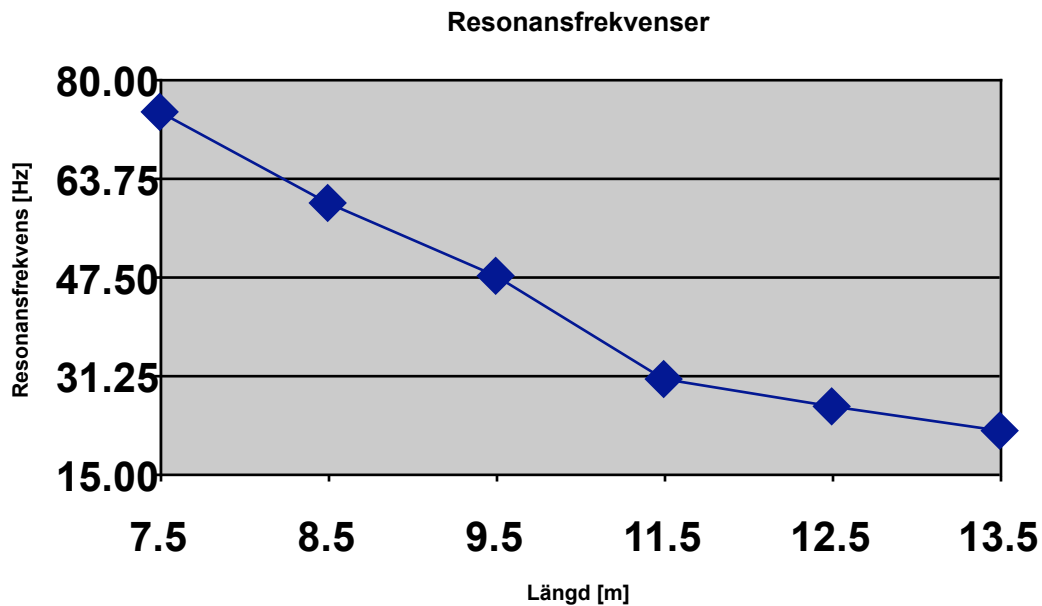
Anledningen till att detta sker är att eftersom de två pendlarna är lika långa och har lika stor massa hängande har de därmed samma resonansfrekvens. När man sätter fart på den ena pendeln börjar den svänga med sin resonansfrekvens och även driva på den andra med dess resonansfrekvens. Eftersom den andra pendeln drivs med sin resonansfrekvens ökar dess amplitud mycket fort och energin kan överföras till fullo. Färförskjutningen avgör vilken pendel som driver på vilken, eftersom den pendeln vi lyfter upp först från början får en färförskjutning längre fram kommer det att vara den drivande pendeln tills det att den står helt still, då stannar vågutbredningen för den pendeln och den andra pendeln kan ändra sin fas i förhållande till den första så att den ligger först, det är då den som är den drivande pendeln.

## Metallblad

Sex stycken metallblad av varierande längd satt fastsatta i ett vibrerande högtalarmembran. Uppgiften var att studera metallbladen och se vid vilken frekvens resonans uppstod.

Vi såg efter experimenterande med frekvensen att ju längre metallblad desto lägre resonansfrekvens.

Vi fick följande värden:



Vi kan se ett tydligt sjunkande samband mellan resonansfrekvens och längd.

Hade vi haft lite fler mätvärden hade vi enkelt kunnat ställa upp ett uttryck för att beräkna resonansfrekvens utifrån längd för just det här materialet.

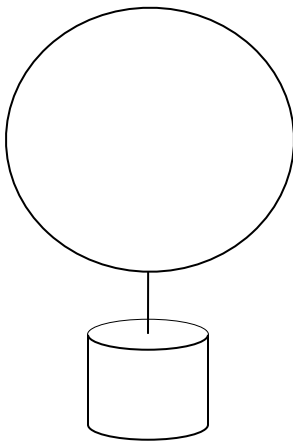
## En sträng av metall

Uppgiften var att undersöka vid vilka frekvenser resonans uppstod hos en cirkulär metallsträng monterad på ett högtalarmembran.

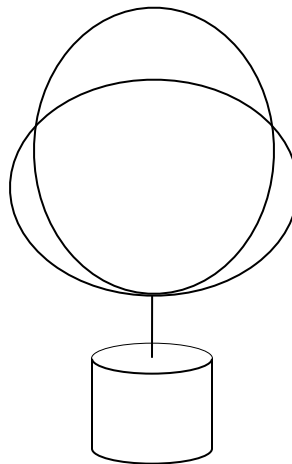
Resonans med två noder uppstod vid 20 Hz. Det var den högsta (och enda) resonansfrekvens vi observerade.

Anledningen till att resonans uppstår i det här systemet är på grund av att metallsträngen är elastiskt, det vill säga när fästpunkten till högtalarmembranet går upp och ner så trycks metallsträngen ihop och dras ut. Både botten och toppen på cirkeln rör sig alltså, men på grund av egenskaper i ämnet (att det är elastiskt) kommer toppen och botten inte hamna i fas för alla frekvenser. För vissa specifika frekvenser kommer däremot toppen och botten hamna i direkt motfas, vid detta läge kommer vi få maximal amplitud på rörelsen, det vill säga vi har en resonansfrekvens.

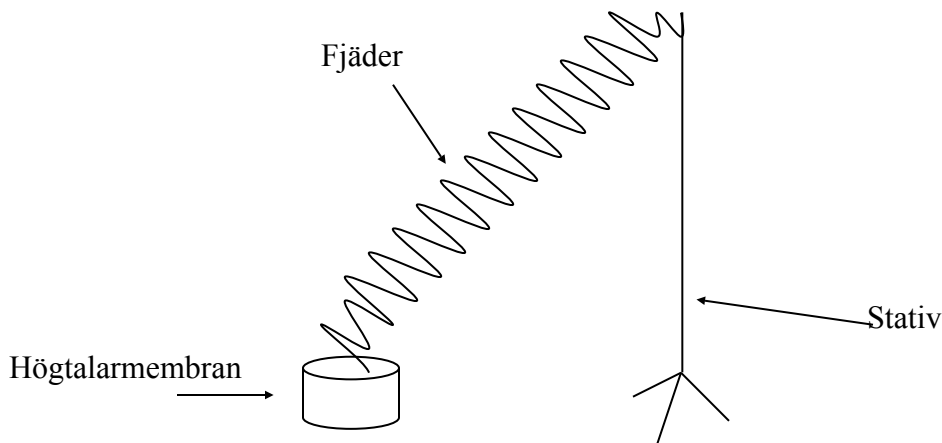
Utgångsläge



Med resonans



## Metallfjäder



En fjäder sitter uppsatt mellan en fix punkt i toppen och ett svängande högtalarmembran. Uppgiften var att bestämma den longitudinella utbredningshastigheten för fjädern. Vi började med att konstatera att utbredningshastigheten,  $v$ , är  $v = f\lambda$ .

Därefter så började vi göra mätningar för olika frekvenser på högtalarmembranets rörelse. Vid vissa specifika frekvenser kunde vi tydligt notera förtätningar och förtunningar i fjädern.

Med hjälp av en linjal mätte vi då avståndet mellan två förtätningar och konstaterade att detta var  $\lambda/2$ . Utifrån detta kunde vi då beräkna utbredningshastigheten,  $v$ .

Frekvens [Hz]	Våglängd [m]	Utbredningshastighet [m/s]
59	0.012	7.08
70	0.01	7
75	0.0095	7.125

Vi kan tydligt se att om vi inte förändrar någon egenskap hos fjädern är utbredningshastigheten konstant. För att ändra utbredningshastigheten behöver man alltså ändra någonting, vi testade att förändra utdragningen av fjädern till hälften och fick då att för resonansfrekvensen 61,8 Hz var våglängden 0,055 m och utbredningshastigheten var 3,4 m/s. Genom att halvera utdragningen halverade vi alltså också utbredningshastigheten hos vågen.

## ***Sammanfattning***

Efter att i 4 timmar ha studerat diverse svängande system känner vi att vi verkligen har ett nytt grepp om konceptet ”vågor” på ett helt nytt plan.

Genom att verkligen djupdyka i fenomenet ”vågor” kan vi verkligen börja förstå hur vår omvärld fungerar.

Tack för denna stunden!